$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geq 0 \\ x-2, & x<0 \end{cases} \quad \mu\varepsilon\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad \mu\varepsilon\ \mathcal{R}(f)=(-\infty,-2)\cup[1,+\infty)$$

$\underset{\text{συνεχής}}{f:E_1\to E_2} \iff (\forall \underset{\text{ανοιχτό}}{A\subseteq E_2}): f^{-1}(A)$ ανοιχτό

$f^{-1}((0,2))=[0,1)$

$f:E_1\to E_2$ Ν.δ.ο. f συνεχής $\overset{①}{\iff} f^{-1}(A^\circ)\overset{②}{\subseteq}(f^{-1}(A))^\circ \iff \overline{f^{-1}(A)}\overset{③}{\subseteq} f^{-1}(\bar{A}) \iff$

$\iff f(\bar{X})\overset{④}{\subseteq}\overline{f(X)}$ με $A\subseteq E_2$ και $X\subseteq E_1$

Θ.δ.ο. ① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ④ ⇒ ①

① ⇒ ②: $A^\circ\subseteq A \Rightarrow f^{-1}(A^\circ)\subseteq f^{-1}(A) \Rightarrow (f^{-1}(A^\circ))^\circ\subseteq(f^{-1}(A))^\circ$

$\xRightarrow[\Rightarrow (f^{-1}(A^\circ))^\circ=f^{-1}(A^\circ)]{A^\circ \text{ ανοιχτό} \xRightarrow{f \text{ συν}} f^{-1}(A^\circ) \text{ ανοιχτό}} f^{-1}(A^\circ)\subseteq(f^{-1}(A))^\circ$

② ⇒ ③: Ισχύει: $\bar{A}=((A^c)^\circ)^c$ φορμαλιστικά γιατί $(\bar{A})^c=(A^c)^\circ$ (*)

Ισχύει: $f^{-1}(A^c)=(f^{-1}(A))^c$ (**)

Από την (2) ισχύει: $f^{-1}((A^c)^\circ)\subseteq(f^{-1}(A^c))^\circ$ (***)

$f^{-1}(\bar{A})\overset{(*)}{=}f^{-1}(((A^c)^\circ)^c)\overset{(**)}{=}(f^{-1}((A^c)^\circ))^c\overset{(***)}{\supseteq}((f^{-1}(A^c))^\circ)^c=\overline{f^{-1}(A)}$

$=(((f^{-1}(A))^c)^\circ)^c\overset{(*)}{=}\overline{f^{-1}(A)}$

③ ⇒ ④:

Από την ③ ισχύει: $\overline{f^{-1}(\overline{f(X)})}\subseteq f^{-1}(\overline{f(X)})$ (*)

Ισχύει: $X\subseteq f^{-1}(f(X)) \Rightarrow \bar{X}\subseteq\overline{f^{-1}(f(X))}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{X})\subseteq f(\overline{f^{-1}(f(X))})\overset{(*)}{\subseteq} f(f^{-1}(\overline{f(X)}))\subseteq\overline{f(X)}$

④ ⇒ ①:

f συνεχής $\iff (\forall \underset{\text{κλειστό}}{K\subseteq E_2}): f^{-1}(K)$ κλειστό

Έστω K κλειστό, $K\subseteq E_2$

Από το ④ $\Rightarrow f(\overline{\underbrace{f^{-1}(K)}_{X}})\subseteq\overline{f(\underbrace{f^{-1}(K)}_{X})}\subseteq\bar{K}\xRightarrow{K \text{ κλειστό}} K$ (*)

Από $X\subseteq f^{-1}(f(X)) \Rightarrow \overline{f^{-1}(K)}\subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(K)}))\overset{(*)}{\subseteq} f^{-1}(K)\xRightarrow{f^{-1}(K)\subseteq\overline{f^{-1}(K)}}$

$\Rightarrow f^{-1}(K)=\overline{f^{-1}(K)} \Rightarrow f^{-1}(K)$ κλειστό

Άλλος τρόπος:

Έστω $f: E_1 \to E_2$ συνεχής Ν.δ.ο. $f(\bar{X}) \subseteq \overline{f(X)}$, $X \subseteq E_1$

Λύση

Έστω $y \in f(\bar{X}) \iff (\exists x \in \bar{X}): y = f(x)$

$x \in \bar{X} \iff (\exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν $X): \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = x$

$\left.\begin{array}{l} (f(x_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}} \text{ εν } f(X) \\ f \text{ συνεχής} \xRightarrow{\lim x_\nu = x} \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} f(x_\nu) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \in \overline{f(X)} \xRightarrow{f(x)=y} y \in \overline{f(X)}$

$f: E \to \mathbb{R}$, $\alpha \in E$, $f(\alpha) > 0$

συνεχής

Ν.δ.ο. $(\exists \delta > 0)(\forall x \in B(\alpha, \delta)): f(x) > 0$

Απόδειξη

$f(\alpha) > 0 \Rightarrow \frac{f(\alpha)}{2} > 0$. Θεωρώ σφαίρα $B\left(f(\alpha), \frac{f(\alpha)}{2}\right) = \left(\frac{f(\alpha)}{2}, \frac{3f(\alpha)}{2}\right)$ $\Big\} \Rightarrow$

f συνεχής στο $\alpha \iff (\forall U(f(\alpha)))(\exists V(\alpha)): f(V(\alpha)) \subseteq U(f(\alpha))$

$\Rightarrow (\exists V(\alpha)): f(V(\alpha)) \subseteq B\left(f(\alpha), \frac{f(\alpha)}{2}\right) \xRightarrow[\Rightarrow f(B(\alpha,\delta)) \subseteq f(V(\alpha))]{(\exists \delta > 0): B(\alpha, \delta) \subseteq V(\alpha)}$

$\Rightarrow (\exists \delta > 0): f(B(\alpha, \delta)) \subseteq B\left(f(\alpha), \frac{f(\alpha)}{2}\right)$

$\Rightarrow \forall x \in B(\alpha, \delta): f(x) \in B\left(f(\alpha), \frac{f(\alpha)}{2}\right) \Rightarrow \forall x \in B(\alpha, \delta): f(x) > \frac{f(\alpha)}{2} > 0$

(E, ρ) μ.χ.

$f: E \to \mathbb{R}$ Ν.δ.ο. $A = \{x \in E : f(x) = 0\}$ κλειστό.

συνεχής

Απόδειξη

A κλειστό $\iff \forall (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν A, συγκλίνουσα, ισχύει $\lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu \in A$

$(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ εν A, με $\lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = x$

$x_\nu \in A, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_\nu) = 0, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} f(x_\nu) = 0 \xRightarrow[\text{Άρα } \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} f(x_\nu) = f(x)]{\lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} x_\nu = x,\ f \text{ συνεχής}} f(x) = 0$

$\Rightarrow x \in A$

Αλλάζοντας την εκφώνηση:

$f, g: E \to \mathbb{R}$ $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\} = \{x \in E : f(x) - g(x) = 0\} = \{x \in E : (f-g)(x) = 0\}$

συνεχείς